

文章编号: 1000-8055(2000) 01-0001-11

不可压湍流平均流与拟序流的各向异性 模式理论及其数值验证

高歌¹ 熊焰²

¹(北京航空航天大学 404 教研室, 北京 100083)

(gao@ns.ngl.buaa.edu.cn)

²(Dept. of Ocean Engineering, Florida Atlantic University USA)

(yong@oe.fau.edu)

摘要: 使用侧偏统计平均方法理性推导了不可压湍流的封闭方程组。侧偏统计平均提供了湍流脉动量的一阶统计信息, 在引入加权漂移速度对称性及正交各向异性后, 导出了漂移流的连续方程、动量方程及能量方程, 最后依据湍流物理的唯象论, 使用动量传输链概念模化封闭了整个方程组。方程组不含任何经验系数, 保留了 $N-S$ 方程的均化的非线性特性。其级数形式的能量方程与非线性现象多尺度层次现象相对应, 具备了描述湍流统计平均流动及拟序结构流动的双重功能。用平面射流, 层流—湍流转捩及后向台阶流等算例初步验证了方程对真实湍流的适定性。

关键词: 不可压缩流动; 湍流; 模化

中图分类号: V211

文献标识码: A

1 引言

作为当代未解的重大科学与概念问题之一, 湍流涉及了航空、航海、工业生产过程、海洋、气象、天文及生物等广泛领域。湍流的有序与随机特性的研究在数学与理论物理上也具有重要价值。在工程上, 对湍流的深入理解有助于加强对湍流的利用、控制及提高 CFD 的预测精度。

湍流同时兼有随机特性及拟序结构现象, 这导致了湍流研究的二大学派: 统计学派与结构学派。自 1883 年 Reynolds 提出其平均方法并引出著名的封闭问题之后, 一个多世纪来特别是近 10~20 年, 形形色色复杂程度各异的统计平均范畴的湍流模型回避了 $N-S$ 方程的非线性特性引起的极度困难, 在引入依赖实验的经验系数及不同封闭方式后, 可以近似估算高 Reynolds 数的复杂流动并具有不同程度的通用性。但是, 湍流预测

的可信度及通用性问题仍未得到解决, 经验系数不具备通用性, 系数的数学物理基础尚未得到探索^[1]。Reynolds 平均方法导致平均方程中完全丧失湍流扰动的一阶统计信息, 迫使研究者只能对高阶矩进行模化, 这是统计平均模型困难的根本原因之一。

结构学派 30 多年来展示了令人眼花缭乱的湍流结构, 但未能从间歇结构现象中引伸出相应的基础理论。 $N-S$ 方程可以在连续介质概念成立的最小尺度上描述湍流并展示各种结构现象, 但 $N-S$ 方程的直接模拟所能适应的 Reynolds 数范围远远低于大多数工程实际问题的 Reynolds 数, 直接模拟所采用的超密网格($10^6 \sim 10^9$ 网点)也不适宜工程应用。在稀疏的网格上对高 Reynolds 流动采用大涡模拟, 是一个很好的理想。但现行的各种大涡模拟模型有 2 个弱点: 一是采用稀疏网格后未引入必需引入的湍流粘性系数, 二是采用滤波函数得出的小涡对大涡的作用

收稿日期: 1999-10-19; 修订日期: 1999-11-30

作者简介: 高歌(1945-), 男, 北京航空航天大学 404 教研室博士生导师; 熊焰(1955-), 男, 美国佛罗里达大西洋大学教授, 博士

© 1994-2010 China Academic Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

力项不准确,未能真实反映高阶项影响。这导致了大涡模型不得采用仍然很密的网格($10^6 \sim 10^8$ 左右),且计算结果偏离真实间歇流动,违背了建立大涡模型的初衷。现在湍流研究的现状是"Structures exist without any theory at place where theories do not allow the existence of structures"。

N-S 方程可以在连续介质概念成立的最小尺度网格上准确模拟湍流,但在稀疏网格上则必须引入湍流应力项。这表明,能全面反映湍流的随机与拟序综合特性的湍流方程一定可以从 N-S 方程框架内导出。作者在本文中采用侧偏平均方法以保留湍流脉动的一阶统计平均信息。依据一定的原则将一点处湍流脉动划分为二组,每组的统计平均量均不为零,将各组的概率权重引入侧偏平均值之后获得了加权漂移速度的对称性,从而明确了各组侧偏平均量及其方程的对称性,为进一步引入加权漂移速度的正交各异性奠定了基础^[2]。多尺度层次结构特性是非线性现象的共性,无限多层次结构意味着单纯数学推导无可避免的总是引出不封闭的高阶关联项。但从物理唯象论来看,无限多层次结构现象只是流体动能因有效粘性作用从平均流传输到扰动漂移流,再经由涡团级联散裂过程(cascade-down)及分子粘性作用最终变为分子热的确定论过程的表象。既在湍流的分维、混沌特性引出的视在的不确定性——不封闭性背后,隐藏着能量传递过程的确定论实质。这正是赖以封闭湍流方程的唯象物理学实质。准确反映物理实质的封闭方法将无需引入经验系数,并保留 N-S 方程的均化非线性特征。湍流的多尺度现象对应于能量从低阶到高级级联传递的过程,各种阶次的运动都会形成相应尺度的视在结构。基于这种认识,作者推导了级数形式的漂移流机械能方程。数值计算表明,采用不同的阶次计算,即可精确获得统计平均流或拟序结构流。

2 统计侧偏平均

尽管湍流极为复杂,但在连续介质概念成立的最小尺度上满足 Navier-Stokes 方程。N-S 方程的非线性特性在高 Reynolds 数时通常导致无穷多解。假定 $\mathbf{u}$ 是其解空间随机抽样值,则相应的脉动速度可以定义为:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \quad (1)$$

以上速度不管有无附标,均为矢量。式中平均速度

由系综平均获得:

$$\bar{\mathbf{u}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \quad (2)$$

式中: N 是 N-S 方程可能的解的数目。将所有可能的解依照一定的划分标准分为二组,其第一组占有 N_I 个解,第二组为剩余的 N_{II} 个解。二组相应的脉动值表示为 $\mathbf{u}^I$ 及 $\mathbf{u}^{II}$, 第一组脉动值的系综平均为:

$$\bar{\mathbf{u}}^I = \lim_{N_I \rightarrow \infty} \frac{1}{N_I} \sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{u}_i^I \quad (3)$$

该值称之为第一组漂移速度。相似的

$$\bar{\mathbf{u}}^{II} = \lim_{N_{II} \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{II}} \sum_{i=1}^{N_{II}} \mathbf{u}_i^{II} \quad (4)$$

称为第二组漂移速度。因为所有脉动的总系综平均

$$\bar{\mathbf{u}}' = \lim_{N, N_I \rightarrow \infty} \frac{N_I}{N} \frac{\sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{u}_i^I}{N_I} + \lim_{N, N_{II} \rightarrow \infty} \frac{N_{II}}{N} \frac{\sum_{i=1}^{N_{II}} \mathbf{u}_i^{II}}{N_{II}} \quad (5)$$

等于零,则有:

$$M_I \bar{\mathbf{u}}^I + M_{II} \bar{\mathbf{u}}^{II} = 0 \quad (6)$$

式中 $M_I = N_I/N$ 及 $M_{II} = N_{II}/N$, 且有:

$$M_I + M_{II} = 1 \quad (7)$$

M_I 及 M_{II} 作为 t 与 x 的函数,可看作是二股漂移流的无量纲质量密度或权重系数。(6)式表明,二股漂移速度并非一定要对称。但它们的加权漂移速度 $\tilde{\mathbf{u}}^I = M_I \bar{\mathbf{u}}^I$ 及 $\tilde{\mathbf{u}}^{II} = M_{II} \bar{\mathbf{u}}^{II}$ 则是对称的,因为

$$\tilde{\mathbf{u}}^I + \tilde{\mathbf{u}}^{II} = 0 \quad (8)$$

因为压力脉动 p_i' 的平均值为零,则一、二组的加权平均脉动压力 $\tilde{p}^I$ 及 $\tilde{p}^{II}$ 也是对称的,即:

$$\tilde{p}^I + \tilde{p}^{II} = 0 \quad (9)$$

对应第 i 个解的不可压流的 N-S 方程为:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p_i + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (10)$$

该方程对所有解的系综平均为:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'} \quad (11)$$

$$\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_i' \cdot \nabla) \mathbf{u}_i' \quad (12)$$

从(10)式中减去(11)式,可得出对应于第 i 个脉动的动量方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = \\ -\frac{1}{\rho} \nabla p_i' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}' + \overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'} \end{aligned} \quad (13)$$

方程(13)对 I 组的加权系综平均为:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}} = - \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}^{\text{I}} + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}} - (\tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + M_{\text{I}} \overline{(\mathbf{u}^{\text{I}} \cdot \nabla) \mathbf{u}} - M_{\text{I}} \overline{(\mathbf{u}^{\text{I}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{I}}} \quad (14)$$

$$\overline{(\mathbf{u}^{\text{I}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{I}}} = \lim_{N_{\text{I}} \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{\text{I}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{I}}} (\mathbf{u}_i^{\text{I}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^{\text{I}} \quad (15)$$

方程 (13) 对第 II 组的加权系综平均为:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}} = - \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}^{\text{II}} + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}} - (\tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + M_{\text{II}} \overline{(\mathbf{u}^{\text{II}} \cdot \nabla) \mathbf{u}} - M_{\text{II}} \overline{(\mathbf{u}^{\text{II}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{II}}} \quad (16)$$

$$\overline{(\mathbf{u}^{\text{II}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{II}}} = \lim_{N_{\text{II}} \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{\text{II}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{II}}} (\mathbf{u}_i^{\text{II}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^{\text{II}} \quad (17)$$

在 (12)、(15) 及 (17) 中 3 个关联项的关系为:

$$\overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}} = \frac{M_{\text{I}}}{M_{\text{II}}} \overline{(\mathbf{u}^{\text{I}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{I}}} + \overline{(\mathbf{u}^{\text{II}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{II}}} \quad (18)$$

将 (18) 式代入 (14) 及 (16) 式, 可得:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}} = - \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}^{\text{I}} + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}} - (\tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} - M_{\text{I}} M_{\text{II}} \left(\overline{(\mathbf{u}^{\text{I}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{I}}} - \overline{(\mathbf{u}^{\text{II}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{II}}} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}} = - \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}^{\text{II}} + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}} - (\tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + M_{\text{I}} M_{\text{II}} \left(\overline{(\mathbf{u}^{\text{I}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{I}}} - \overline{(\mathbf{u}^{\text{II}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{II}}} \right) \quad (20)$$

值得注意的是, 以上 2 个方程唯一的区别在于右侧最后一项符号相反。这就再次肯定了 $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}}$ 及 $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}}$ 的对称性。因之, 只需求解其中之一方程, 例如 (19), 即可。

3 模化封闭

按照惯例, 可定义:

$$\overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}} = - \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (21)$$

作为单位质量湍流应力的散度。对 (19) 式右侧最后一项的模化为:

$$M_{\text{I}} M_{\text{II}} \left(\overline{(\mathbf{u}^{\text{I}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{I}}} - \overline{(\mathbf{u}^{\text{II}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{II}}} \right) = \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{\text{I}}}{2} + \frac{\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{\text{II}}}{2} \quad (22)$$

$$\text{可以证明} \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{\text{I}} = - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{\text{II}} \quad (23)$$

由此, 可得出平均流及加权漂移速度的连续方程及动量方程如下(因为 $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}}$, $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}}$ 的对称性, 今后只讨论 $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}}$ 并以 $\tilde{\mathbf{u}}$ 表示之):

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} = - \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 (\tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} \quad (27)$$

以上模化应用了动量传输链概念, 即平均流因层流粘性及湍流粘性作用损失的动量传输给加权漂移流, 而加权漂移流的动量又因为以上两种粘性作用, 最终变为分子杂乱运动。详见“§ 5. 讨论”。

下面讨论如何确定湍流应力。通过 X 点与加权漂移速度 $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}}$ 及 $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}}$ 方向垂直的平面可称为漂移流的法平面。漂移流速度的方向及模量随法平面的方位变动, 加权漂移速度矢端曲面在三维空间构成椭球体, 椭球体的长轴与微元体所受拉伸应力主轴方向吻合。可以选择该方向为漂移位矢的方向。为了求出漂移位矢 $\boldsymbol{l}$, 令正交各向异性湍流张量涡团粘性系数为:

$$\boldsymbol{\xi} = \tilde{\boldsymbol{l}} \tilde{\mathbf{u}} \quad (28)$$

并假定: 漂移流特性在湍流场中呈正交各向异性, 主轴 s_1 与湍流平均流流线方向一致, 次轴 n_2 和 n_3 在过 X 点的平均流线的法平面上^[4]。

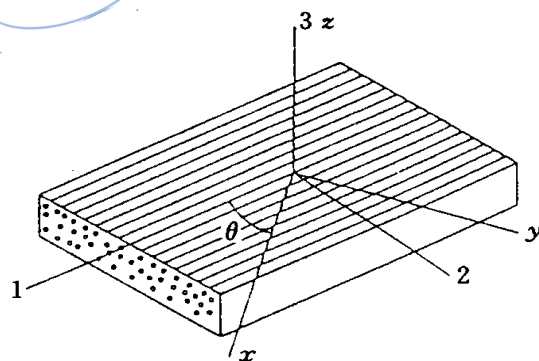


图 1 正交各向异性主轴座标系 123 与非主轴座标系 XYZ 的关系

正交各面异性在固体力学中用于描写具有正交对称材料特性的层板(图 1)。采用图示 $s_1 n_2 n_3$ 座标系时, 由于对称性, 刚度矩阵如下:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & SYM & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (29)$$

式中仅有 12 个非零弹性系数和 9 个独立系数。由于流体的 Poisson 比为零, 湍流粘性系数矩阵中只剩由 ξ 的 9 个独立分量构成的对角线上的 6 个非零系数。即:

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \xi_{11} = l_1 \tilde{u}_1, & C_{22} &= \xi_{22} = l_2 \tilde{u}_2 \\ C_{33} &= \xi_{33} = l_3 \tilde{u}_3 \\ C_{44} &= \xi_{23} + \xi_{32} = l_3 \tilde{u}_2 + l_2 \tilde{u}_3 \\ C_{55} &= \xi_{31} + \xi_{13} = l_1 \tilde{u}_3 + l_3 \tilde{u}_1 \\ C_{66} &= \xi_{12} + \xi_{21} = l_2 \tilde{u}_1 + l_1 \tilde{u}_2 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

为简便起见, 下面以二维为例, 说明一般 $X-Y$ 座标系与正交各向异性 1-2 座标系的应力-工程应变率的变换关系:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \nu_{xs}^T & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{yn}^T & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{ynL}^T \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (31)$$

式中工程湍团粘性系数

$$\nu_{xs}^T = \xi_{ss} = l_1 \tilde{u}_1, \quad \nu_{yn}^T = \xi_{nn} = l_2 \tilde{u}_2$$

$$\nu_{yn}^T = \xi_{sn} + \xi_{ns} = l_2 \tilde{u}_1 + l_1 \tilde{u}_2$$

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta, \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

在采用 (22) 式的模化, 及上述正交各向异性的应力应变率关系之后, 尚需确定漂移位矢的模量, 为此需推导漂移流的机械能方程如下:

漂移流在固定座标系的实际速度是 $\bar{u} + \tilde{u}$, 在 $x+l$ 点及 x 点该运动的动能差为:

$$\frac{1}{2} [\bar{u}(x+l) + \tilde{u}(x+l)]^2 -$$

$$\frac{1}{2} [\bar{u}(x) + \tilde{u}(x)]^2$$

如果 l 是一阶小量, 在 x 点对上式第一项作 Taylor 级数展开, 并只取一阶项, 则上式变为:

$$l \cdot (\nabla \bar{u} \cdot \bar{u} + \nabla \bar{u} \cdot \tilde{u} + \nabla \tilde{u} \cdot \bar{u} + \nabla \tilde{u} \cdot \tilde{u})$$

在 $\tilde{u}$ 的量级与 $\bar{u}$ 相比是一阶小量时, 上式中第一项是 l 距离上平均流自身作用引起的动能变化; 第二项是在 l 距离上平均流因漂移流作用而引起

的动能变化; 第三项是在 l 距离上漂移流因平均流作用而引起的动能变化; 第四项是在 l 距离上漂移流自身作用引起的动能变化。经过大量试算表明漂移流能量方程中只能引入第二项, 因而 l 由该项单独确定。

令 A 是 l 距离上平均流因漂移流作用(一般是阻碍作用)而引起的动能变化(一般是亏损), 该值应等于漂移流所受总力在 l 距离上的作功, 即:

$$A = l \cdot \left[-\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \nu_L \nabla^2 (\tilde{u} - \bar{u}) + \nabla \cdot (\tilde{\tau} - \bar{\tau}) - (\tilde{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right] \quad (32)$$

如令 $A = \xi: \nabla \bar{u}$, 则有

$$\xi: \nabla \bar{u} = l \cdot \left[-\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \nu_L \nabla^2 (\tilde{u} - \bar{u}) + \nabla \cdot (\tilde{\tau} - \bar{\tau}) - (\tilde{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right] \quad (32a)$$

(32a) 即是小扰动情况下一阶精度的求解 l 的能量方程, 在小扰动情况下, 使用一阶项 $\xi: \nabla \bar{u}$ 就可获得平均流态。但大扰动情况, 有必要计入 $\nabla \bar{u} \cdot \tilde{u} \cdot l$ 的高阶展开项, 则

$$A = \frac{1}{1!} \nabla \bar{u} \cdot \tilde{u} \cdot l + \frac{1}{2!} (\nabla^2 \bar{u} \cdot \tilde{u} + \nabla \bar{u} \cdot \nabla \tilde{u}) : l^2 + \frac{1}{3!} (\nabla^3 \bar{u} \cdot \tilde{u} + \nabla^2 \bar{u} \cdot \nabla \tilde{u} + \nabla \bar{u} \cdot \nabla^2 \tilde{u}) : l^3 + \dots \quad (32b)$$

当平均流的速度量级与漂移流的速度量级相当或更小时, 平均流处于剧烈的被切入、切断或搅拌状态, 平均流的全部动能都会变成湍流动能。这种状态可出现在钝体尾涡脱落散裂区及强烈燃烧反应区等具有超强扰动的区域。此时方程 (32) 右

侧还应计入 $l \cdot \frac{D\bar{u}}{Dt}$ 项, 即:

$$A = l \cdot \left[-\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \nu_L \nabla^2 (\tilde{u} - \bar{u}) + \nabla \cdot (\tilde{\tau} - \bar{\tau}) - (\tilde{u} \cdot \nabla) \bar{u} - \frac{D\bar{u}}{Dt} \right] \quad (32c)$$

将 (32b) 代入 (32c) 即构成大扰动情况求解 l 的高阶精度的能量方程。以下情况需特别注意:

① 小扰动时, (32a) 可构造成统计平均模型。

② 大扰动时, (32a) 构成的方程只能对一阶扰动量平均, 高阶量对应的高阶拟序结构将得以呈现, 因而成为拟序结构模型。

③ 在大扰动情况下, (32b) 代入 (32c) 构成统计平均模型。

④ 在小扰动情况下, 计算 A 时如只使用 (32b) 式中的高阶而去掉一阶项 $\xi: \nabla \bar{u}$, 并配合较密网格, 则可获得弱扰动情况的低阶拟序结构。

⑤ 计算统计平均流时, 一般应先从一阶方程算起, 如有高阶拟序流干扰平均流态, 再使用高阶方程。

⑥ 从(32b) 式可知, 诸展开项中只有第一项是湍流粘性功项, 用除式求解 l 时只有该项放在分子上, 其余各高阶项均应与(32c) 式右侧扩号中的项一齐放在分母中。

实际计算时使用的张量涡团粘性中还应计入实度系数 C_s , 即:

$$\xi = C_s \tilde{u}$$

(33)

假定漂移位矢 l 的有效作用半径是 l , 为简单起见用边长 $2l$ 的正方微元体来讨论实度系数。在一般三维流中, 微元体 6 个侧面都承受湍流表面应力, 则称这种表面为湍流激励表面, 其面积用 S_T 表示。6 个面都是激励表面的微元体的体积内也必然充满湍流, 其实度系数必然为 1。XY 平面上的二维流, 微元体与 Z 轴垂直的 2 个侧面虽有湍流强度(湍流永远是三维的), 却无净湍流表面应力, 可称为非激励表面, 其面积为 S_N 。则实度系数可表示为:

$$C_s = S_T / (S_T + S_N)$$

对 3- D 流 $C_s = 1$, 2- D 流 $C_s = 2/3$

如微元体的中心位于边界层底层(图 2) 则微元体一半体积在固体边界之外, 有效体积缩小一半, 有效激励表面积也缩小一半, 则实度系数

3- D 流 $C_s = (1/4) \times 1 = 1/4$

2- D 流 $C_s = (1/4) \times (2/3) = 1/6$

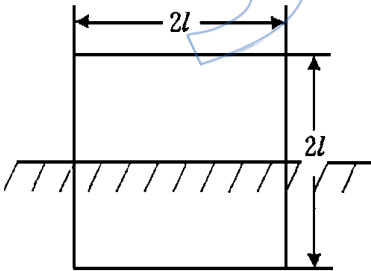


图 2 固壁边界微元体

在边界层中 l 的尺寸一般在 0.8δ 左右, δ 为边界层厚度。因而整个边界层中采用上述实度系数, 仍可获得足够的精度, 仅在边界层上部因使用的实度系数偏低而造成速度型轻度亏损。

方程组(24~27, 32, 33) 即是不可压湍流的封闭的控制方程组。值得一提的是, 最后的方程中不仅不含任何经验系数, 划分 I, II 两组的权重系数 M_1, M_2 也不以显式出现而无需求解。

4 数值计算验

为了验证以上导出的不可压流方程对真实流动的适定性, 初步选择了几个有典型代表性的二维流动实验作为验证算例。计算方法采用标准的 SIMPLE 方法、交错网格。为了避免数值误差污染计算结果, 一律采用了二阶精度的中心差分格式。数值计算的稳定性完全依赖于物理粘性的准确性。

4.1 平面射流

平面二维射流是用来检验在自由剪切流中湍流扩散特性的主要算例, 包括 $K - \epsilon$ 模型在内的许多湍流模型首先利用平面射流调整其经验系数。本文不可压湍流方程中不含任何经验系数, 湍流扩散特性是否准确完全取决于方程的正确性及模化过程是否准确符合湍流的物理实质。

算例的二维射流喷口宽度 2 cm, $Re = 3 \times 10^4$ 计算以射流轴线分开的长 1.0 米, 高 0.2 米的对称半域。计算采用(32a) 构成的一阶精度方程及实度系数 $C_s = 2/3$ 在 40×40 网格上进行。图 3 是所得射流及其周围被引射流的流动图画, 在射流边界之内, 流线皆呈直线, 说明该区域内的低阶拟序结构和弱扰动均被一阶精度的能量方程压抑, 故可算出统计平均流态。射流边界外的被引射流区拟序流速远大于平均流速, 呈现了拟序旋涡结构。图 4 是 0.4~0.96 米区域的速度矢图。从图中可见, 被引射区的速度值极小。将等于 1/2 中心峰值

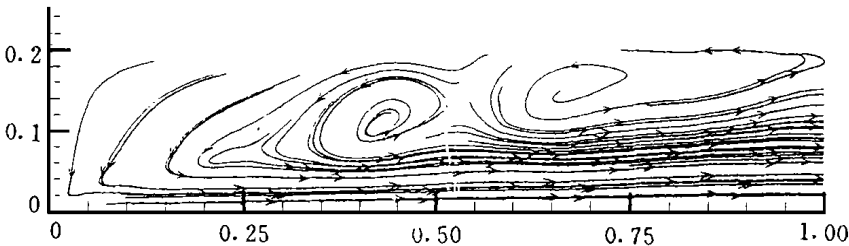


图 3 平面射流的流态

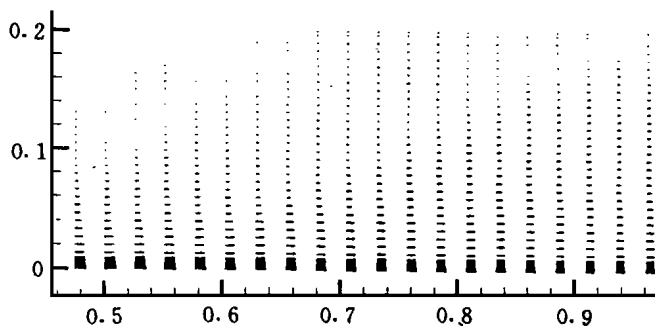


图4 平面射流的速度矢量图

速度处的 y/x 定为扩散率, 计算所得扩散率为 0.105, 恰巧落在实验所得的 0.10~0.11 范围正中^[3]。曾试用(32c)计算平面射流, 扩散率严重偏低, 这说明属于弱扰动范围的流动现象不能使用超强扰动方程计算。本方程能否全面适宜自由剪切流, 今后还需进行远场尾迹、混合层及圆射流计算, 其中特别重要的是检验其能否解决平面射流/圆射流异常问题。

4.2 固壁边界层及转捩

检验湍流模型的第二类实验是固壁边界层及转捩。该问题的难点在于, 必须同时处置二处从低 Reynolds 数层流向湍流的转变: (1) 在平行壁面方向层流在转捩区向充分发展湍流的转变; (2) 在垂直壁面方向从层流底层向上方湍流对数律区的转变。该算例是对本文方程组的严重考验, 因为方程组中不含任何经验处理, 即不能调整经验系数, 也不能采用近壁面低 Reynolds 处置或壁面函数, 唯一可动之处是在能量方程(32)中选取不同的阶次, 以获取不同的计算精度。因此能否涵盖以上二种从层流到湍流的转变, 完全依赖方程能否准确反映湍流物理本质。

在 6 米长、3 米高的空间采用 81×61 网格计算零压力梯度底部固壁边界层流动。 Y 方向采用指数分布网格以保障底部有较密的网格, 最底层的 3~4 层网格位于层流底层之内。在 X 方向转捩区也采用了密集网格。采用依据 x 长度为基础的 Reynolds 数, 入口 $Re = 1.0 \times 10^5$, 出口 $Re = 2.2 \times 10^7$ 。入口处采用 1 cm 厚的 $1/2$ 次方层流边界层速度型, 边界层之上为均匀速度。平均流速度的初始值全场皆为 1, 而漂移流速度初始值为零, 壁面使用无滑移边条。首先使用一阶能量方程(32a)进行计算, 在充分发展湍流区域发现有围绕 $1/7$ 次方平均流稳定速度型的拟周期性的速度摆动, 这种现象表明本文推导的方程组具有描述拟序结构流的能力。但本算例的主要目的是检验方

程描述转捩及湍流固壁边界层平均流速度型。为了在使用一阶能量方程时获得稳定速度型, 程序中使用了沿 y 向相邻点湍流粘性系数的光滑措施。转捩区起始于 $Re = 8 \times 10^5$ 处, 图 5 显示了在转捩区前后速度型及边界层厚度的变化, 图 6 显示了充分发展区计算所得平均流速度型与 Klebanoff 实验结果的对比^[5], 最大误差 2%。转捩区及充分发展区的各种参数, 如边界层厚度、摩擦系数分布、速度型对数律、形状因子、湍流应力值等均与实验获得了吻合, 误差小于 3%。

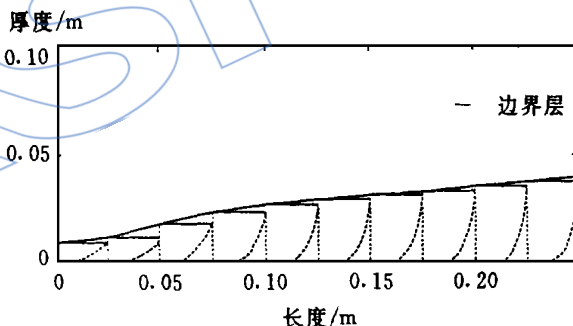


图5 平板边界层转捩区速度型及边界层厚度形态

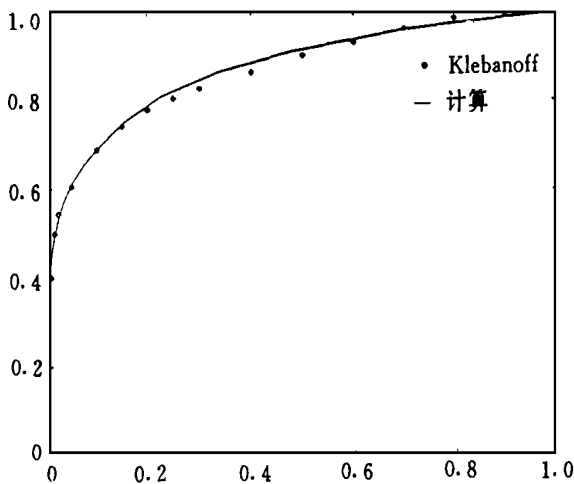


图6 湍流充分发展区速度型

在采用二阶精度的能量方程(32b)和(32c)计算时, 不需要施加光滑化措施即可获得误差小于

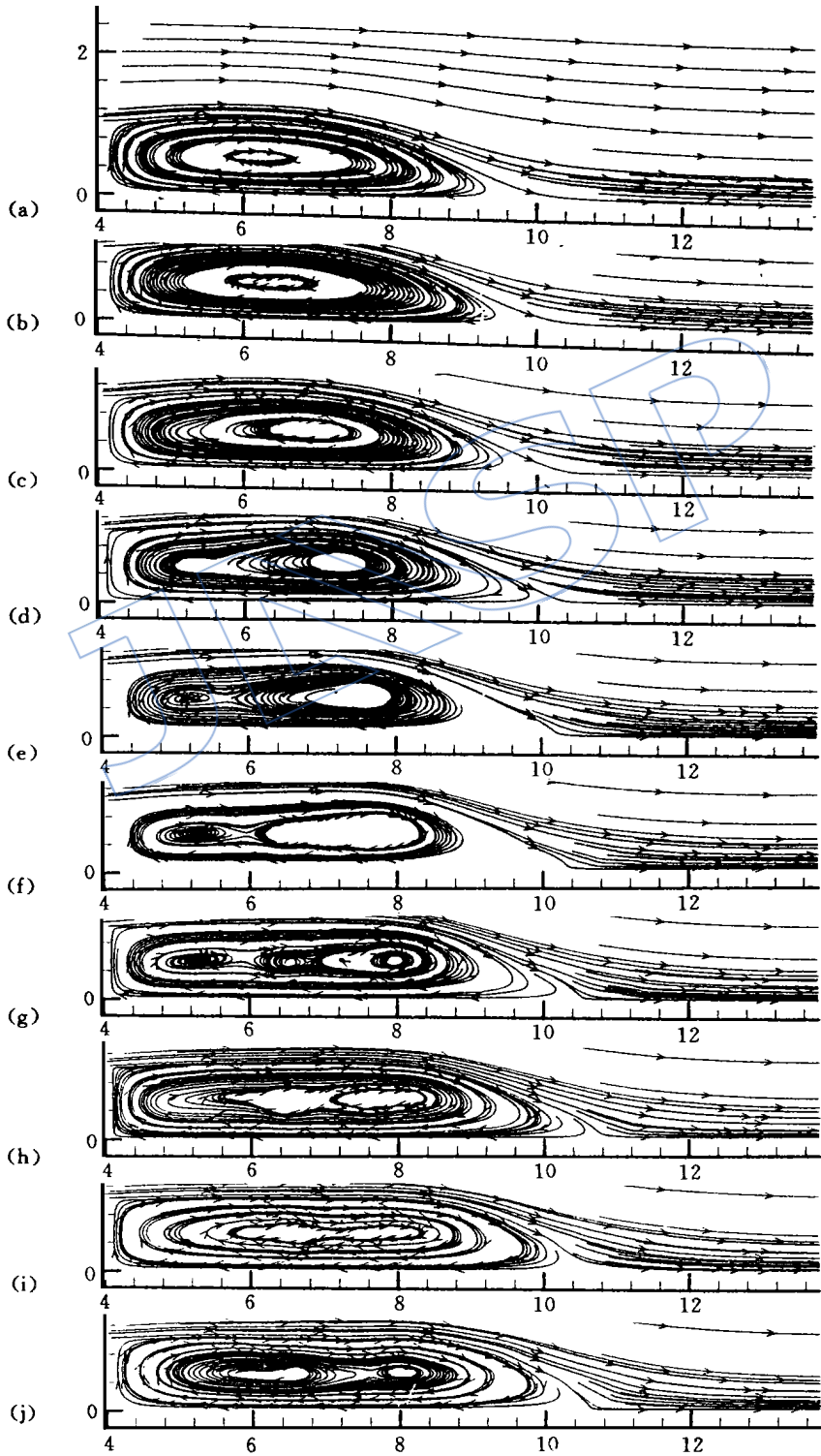
1% 的光滑的统计平均流速度型, 完全压抑了拟序流引起的速度型周期性变动。这说明零压力梯度的固壁边界层中主要是一、二阶拟序流。应当说明的是, (32c) 中虽然含有用于超强扰动的专用项 $D\bar{u}/Dt$, 但该算例与平面射流不同, 该值极小, 并不影响平板边界层计算结果。

以上计算结果表明, 本文方程组具备了计算从层流到高 Re 数湍流广泛范围内边界层流动

能力。一阶精度的计算已能满足工程计算的精度要求。今后还应检验有压力梯度、有壁面粗糙度的边界层流动以及拟序结构的细致数值研究。

4.3 后向台阶分离流动

检验湍流模型的第三类算例是分离流动。本文计算了参考文献[6] 0421 后向台阶分离流动。分离流动是一种极为复杂的流动, 再附着点前的



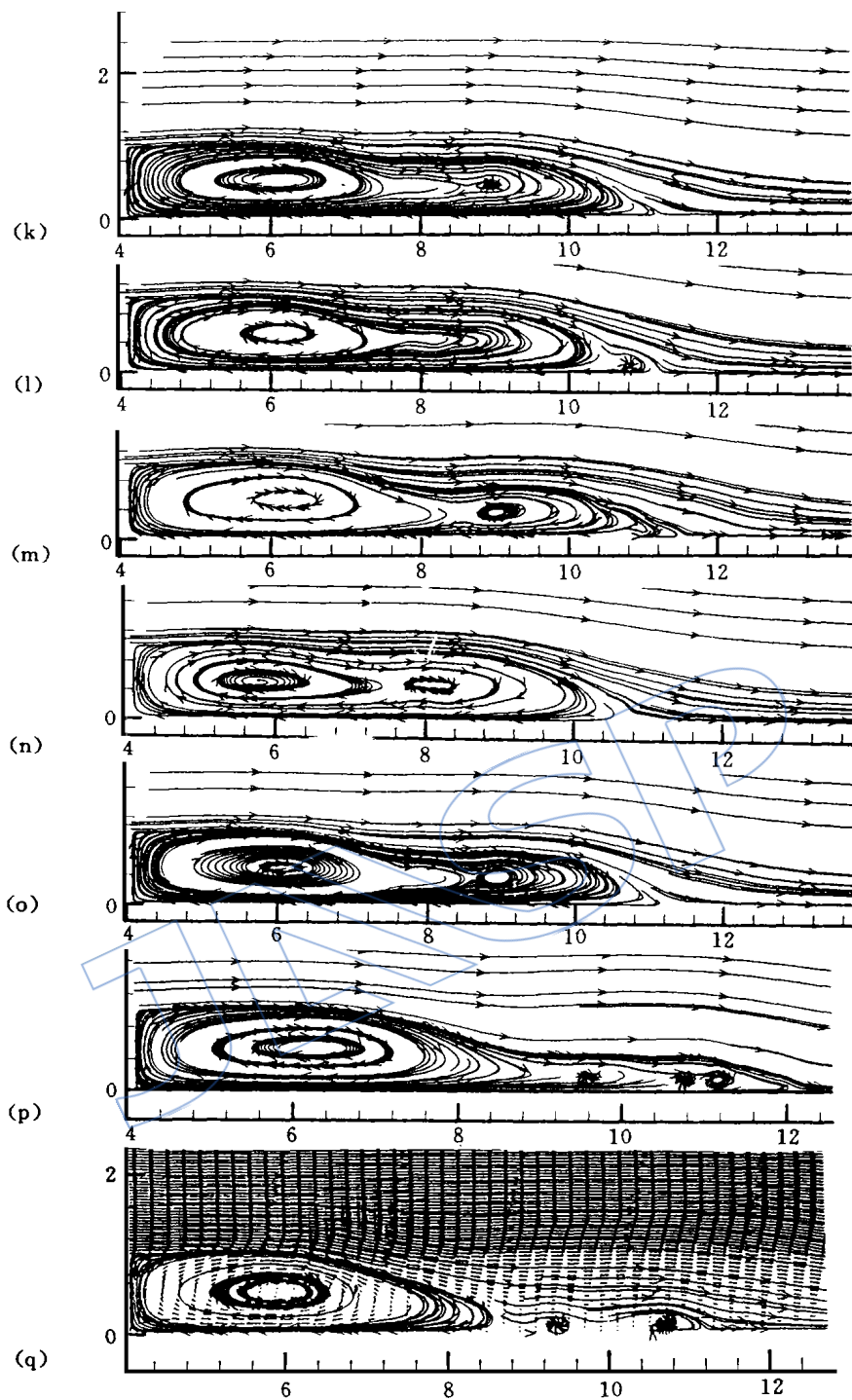


图 7 使用一阶精度能量方程计算所得拟序流态

(a) ~ (c): 单涡核稳定增长期; (d) ~ (i): 多涡核合并、分裂、振荡期; (j) ~ (p): 双涡核结构的分裂脱落期

回流区中有加速、减速、逆压、顺压多种复杂曲线流动, 涡尾区由于旋涡的拟周期性地脱落——散裂而使扰动速度远大于平均流速度, 成为超强扰动流。再附着点前的涡尾区的平均流应变率极小, 而湍流强度却最大。回流区后上部边缘中还存在着湍流能量逆转引起的负粘性的狭长条带区, 该区的存在使再附着点后的远场底部边界层速度型较为丰满^[7]。

根据 Stanford 国际湍流会议 0421 算例, 计算域为 20×2.5 台阶高度, 台阶长度为 4。流场 $Re = 4.5 \times 10^4$ 在使用一阶能量方程 (32a) 计算时, 首先使用 100×60 的均匀网格。网格划分时未考虑固壁边界层的影响, 第一层近壁网格大于边界层厚度, 这将导致无滑边界上产生较大的阻力, 但不会实质性影响回流区形状。使用一阶能量方程意味着只对一阶动能对应的量进行了平均, 工

阶以上的高阶量在计算中将得以表现。计算结果 [图 7(a)~(p)] 显示了一个完整的涡尾脱落的拟周期过程。旋涡长度尚未长到平均值 7 之前呈现单涡核稳定增长 [图 7(a)~(c)], 然后出现双涡核乃至多涡核 [图 7(d)~(i)], 涡核之间反复合并、分裂。在旋涡长度开始超过平均长度之后, 形成双涡核为主的旋涡结构, 后涡核持续后移, 而涡核之间旋涡变窄, 后涡核最终脱落并碎裂成多个小尺度旋涡随流漂移而去 [图 7(j)~(p)]。前涡核又形成单涡核结构开始了下一周期的增长。在现行 Re 数下, 涡尾脱落的长度约占总长的 35%。 Re 数提高后, 脱落的长度将有所上升。该计算形象地再现了旋涡尾部脱落的拟周期过程, 说明尾涡脱落区主要是由高阶项控制的。

采用高阶能量方程 (32b) 和 (32c) 计算时, 涡

脱落或脉动现象完全消失, 旋涡长度稳定在 6.7 处 (图 8)。如将网格密度增加 4 倍并在边界采用细网格, 旋涡长度为 6.95, 与试验所得长度 6.5~7.5 的中值极为接近。这说明粗网格引起的数值误差会引起较大的网格粘性。去掉能量方程的二阶项, 但保存 $D\bar{u}/Dt$ 项时, 粗网格旋涡长度增至 7.0 (图 9), 涡尾部虽不脱落但涡尾长度发生约占总长 8% 的脉动。如去掉 $D\bar{u}/Dt$ 项而保留二阶项, 则旋涡有持续增长的趋势。说明这二种方法的湍流粘性均不足。这更确切地表明涡尾脱落区主要是由二阶项及 $D\bar{u}/Dt$ 项共同控制的。使用高阶能量方程 (32b) 和 (32c) 计算所得的精确的统计平均流型中, 各剖面的速度型都与试验结果吻合。旋涡尾部比其他湍流模型所得结果丰满, 且湍流应力吻合。

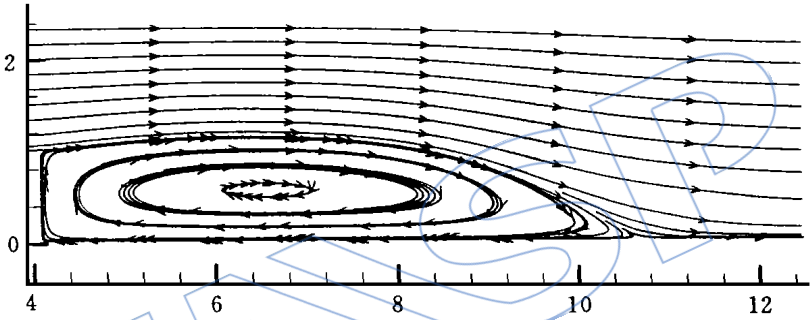


图 8 使用二阶精度能量方程计算的后向台阶统计平均流态

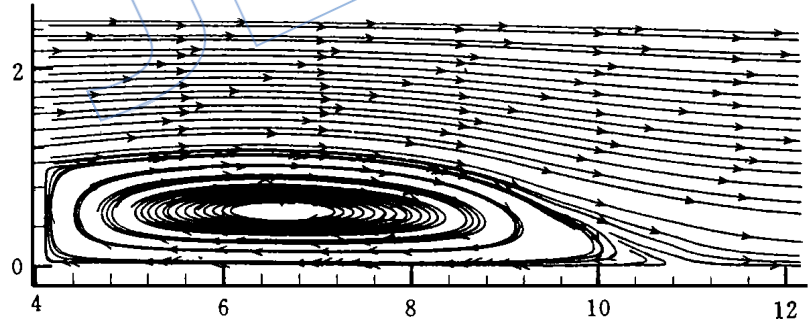


图 9 使用一阶精度能量方程及 $D\bar{u}/Dt$ 计算的结果

分离流动的计算结果清楚证明了在强扰动情况, 一阶能量方程 (32a) 构成大涡模拟模型。而高阶能量方程 (32b) 和 (32c) 构成统计平均模型。统计平均流与拟序结构流是能量方程中不同阶次的项对同一流动现象的不同表现形式。即: 能量方程各阶项皆可形成相应阶次的拟序结构流, 如将所有阶次都纳入能量方程求出平均尺度, 则可得出绝对意义的统计平均流。

5 讨 论

侧偏平均方法将 x 点的速度脉动分为 I, II 两组进行平均, 其平均值不为零, 相应的二组动量方程 (19) 和 (20) 在推导过程中保存了包括一阶量在内的全部统计平均扰动信息, 因而这二组方程如能得到准确反映物理实质的模化并与连续方程、能量方程相配合, 必然能准确反映湍流的统计平均及拟序结构流动特性。而要获得这样的效果, 对传统的 Reynolds 平均及其模化而言, 无疑是不

可能的。因为 Reynolds 平均完全丧失了最关重要的一阶扰动量信息, 从二阶扰动量的关联项及其方程出发来研究扰动对于零阶量的全部影响, 无疑是困难重重的。传统模化引入的经验系数及梯度扩散概念都缺少准确的物理—数学基础, 经验系数不可能获得通用性。本文方程推导过程中引入了 I, II 两组划分的无量纲权重系数 M_1, M_2 之后, 使加权漂移速度 $M\tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}}$ 与 $M\tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}}$ 在各种分组情况下对称, 但 M_1, M_2 在最终的方程中又不显性存在。因而消除了具体确定分组方法及 M_1, M_2 的必要性。这为方程的求解带来了莫大的方便。加权漂移速度 $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}}$ 及 $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}}$ 的对称性表明, 即便在湍流这样具有高度随机性现象中, 自然界普遍存在的对称性法则也是存在的。

长期困扰湍流研究的高阶关联不封闭问题是与非线性过程失稳后具有无限层次结构现象相对应的。单纯从数学方法上力图在某一层次封闭非线性问题是不可能的。每一具体非线性物理过程的无限层次结构现象的不确定性背后, 必然对应于某一确定性的物理过程。对于湍流而言, 无限多层次的涡团串级散裂过程及拟序结构从低阶到高阶的衰变过程的表象之后, 是流体动能从平均流到漂移流传递、并从漂移流最终变为分子热的能量传递链的确定论过程。对方程 (19) 所作的模化 (22) 的物理意义, 可以在漂移流动量方程 (27) 中清楚的看出。从 (24) 可知, 平均流动量损失起因于分子粘性扩散项 $\nu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}$ 及湍流粘性力 $\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}$ 。这二项在 (27) 中都是负号, 成为漂移流动量的源项, 即平均流动量的粘性扩散的动量全部转化成了漂移流的动量。值得指出的是, 在湍流状态下, 平均流的层流粘性力项 $\nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}$ 的作用并非直接摩擦生热。湍流中流体分子构造的滑移层不再和流体运动方向保持相切, 这意味着层流扩散的过程不能在时均流线的大尺度上得以实行, 而转移到了更小尺度的漂移流中。因而数学平均过程得出的 $\nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}$ 项, 理应成为漂移流的源项之一。计算实践表明, (27) 式中如去除该项后将不能计算转捩过程, 该项在转捩过程中与非线性对流项的共同作用是引起转捩的关键因素。方程 (27) 中的分子扩散项 $\nu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}$ 将漂移流动量经由分子粘性摩擦转化成分子热运动, 而项 $\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}$ 经由串级散裂过程将漂移流动量向分子杂乱运动传输。二项共同完成了动量传输链的最后一环。作者认为这种模化是符合物理真实的, 模化之后问题的焦点已转移到如何准确地确定湍流应力上。

Boussinesq 的涡团粘性概念不能妥善处理流线曲率、固体式旋转及有体力流动等复杂流动现象。其根本原因在于湍流是各向异性的, 而已往的模型不仅要依赖经验系数去修正涡团尺度的模量, 更不能确定尺度的方向, 因而得出标量涡团粘性系数, 无法准确反映各向异性。二阶矩 Reynolds 应力模型虽然引入了各向异性应力张量, 但尺度方程的准确性、通用性和经验系数的通用性问题一样, 仍是困难的焦点。侧偏平均保证了漂移流动量方程和漂移流无限层次尺度的能量方程的全息准确性。为最终求出尺度矢量, 本文采用以下三个假设:

- (1) 漂移尺度矢与微元体拉伸应力主轴同向。
- (2) 漂移流特性是正交各向异性的, 其正交主轴方向与平均流线及其法线方向一致。
- (3) 各向异性涡团粘性张量系数在平均流及漂移流中同时起作用。

以上三点假设的正确性需要计算验证。

正交各向异性是用于木材层板的固体力学概念。表观上, 木纹和水纹的确有极大的相似性。湍流中引入正交各向异性的对称性之后极大地简化了各向异性系数矩阵, 使三维各向异性的系数阵的 36 个非零分量简化到正向各向异性的 6 个非零分量。(漂移速矢及位矢相乘提供 9 个张量分量, 其中 6 个剪切张量应变率系数可组成 3 个工程剪切应变率系数, 加上 3 个正应变率系数, 共有 6 个非零系数)。当坐标系旋转偏离正交各向异性坐标轴时, 就得出 36 个非零分量, 与一般各向异性无异。如此得出的涡团粘性张量及湍流应力已与传统的标量涡团粘性系数发生了本质的变化。求解模量时, 在能量方程中取用的级数项越多, 得出的 I 越大, 从而涡团粘性系数越大, 越易得出精确的统计平均结果。对通常检验湍流模型的三类流动问题的计算所获得的高精度结果已经初步表明, 本文模化及假设是正确的。正确的模化必然消除对经验系数的依赖。

能够兼顾计算统计平均流及拟序结构流的计算事实表明, 方程组的推导为普遍性的强非线性多层次结构现象的研究提供了可供参考的数学物理方法。对湍流研究而言, 则为统计平均学派及结构学派的合流提供了理论雏形。由于拟序现象的计算可在 $10^3 \sim 10^5$ 网格上完成的, 方程组也实现了大涡模拟模型的初衷。当然, 对拟序现象, 特别是一阶拟序结构的研究还应开展细致的三维数值研究。

6 结 论

通过侧偏平均及动量传输链模化得出的不可压湍流封闭方程组(24)~(27),(32),(33),保留了包括一阶扰动统计平均量在内的全部扰动信息,不包含任何经验系数和经验处置,可以计算从层流到高 Re 数湍流广阔范围内的统计平均流动及拟序结构流动。

在个人计算机上对自由剪切流、边界层流动及分离流动三类流动现象的数值计算已初步表明,该方程组可获得高精度的统计平均结果,也可在粗网格上获得形象逼真的大涡模拟结果,对各种流动有广泛适应性,可用于湍流的理论研究和工程计算。

侧偏平均、加权漂移速度对称性、漂移流特性正交各向异性、动量传输链封闭及对应于无限结构层次的级数形式的漂移流能量方程等一系列推导方法,为普遍性的强非线性现象的研究提供了有参考价值的数学—物理方法。本文通过理性推导,对建立能囊括湍流的半随机、半有序现象的统一方程做了初步尝试,希望能抛砖引玉。

感谢 作者对蒲晓彦在数值计算方面所作的

协助表示由衷的感谢和赞赏。同时也感谢佛罗里达大西洋大学机械系周文隆教授在该项研究创始阶段所做出的努力及一贯性支持。

参 考 文 献

1 Hewitt G F, Monkewitz P A, Sandham, Vassilicos U C[EB/OL]. Turbulence Jan. to June 1999, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, http://www.newton.cam.ac.uk/programs/trb_sci.html

2 Gao G, Yong Y. Unilateral – Statistical – Average Based Analysis of Flat – Plate Turbulent Flow [C]. MCME’99, Florida (USA), July 25, 1999. ISBN: 960– 8052– 04– 1

3 Wilcox D C. Turbulence Modeling for CFD[C]. DCW Industries, Inc. 1993 ISBN: 0– 9636051– 0– 0

4 Gibson R F. Principles of Composite Material Mechanics [M]. McGraw – Hill Press 1994

5 Klebanoff P S. Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient[R]. NASA Report 1247, 1956

6 斯坦福国际湍流会议文集[C]. 1981

7 S Fujii, et al. Cold Flow Tests of a Bluff – Body Flame Stabilizer[J]. J. Fluids Eng. 100(1978), 323

(责任编辑 王震华)

The United Modeling Theory for both of Mean Flow and Coherent Flow of Incompressible Turbulence

Gao Ge¹, Yan Yong²

¹(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)
(gao@ns.ngl.buaa.edu.cn)

²(Department of Ocean Engineering, Florida Atlantic university, USA)
(yong@oe.fau.edu)

Abstract: A unilateral statistical average scheme is used to derive a new set of closed equations of incompressible turbulent flows, which is capable of describing both of statistical mean flow and intermittent coherent flow without introducing any empirical treatments and coefficients. Besides the special average scheme, the concepts of symmetric drift flows, orthotropic turbulence and the chain of momentum transference are also used in the original derivation. More important, the obtained energy equation of series form suggests that the infinite terms in the equation are corresponding to infinite layers of structures of turbulence. If all the terms of the series are taken for determining the length scale, one obtains statistical mean results. On the other hand, if only parts of terms are taken, coherent flows would appear. To verify the adaptability of the equations, three benchmark flows, i.e. free shear flow, boundary layer transition flow and separated flow, are numerically simulated on PC computers. Both of accurate results of statistical mean flows and vivid structures of coherent flows are obtained.

Key words: incompressible flow ; turbulence; modelling